5. HIDROGRAMA DE UNA CUENCA COMPUESTA

5.1. Introducción

El análisis de una cuenca compuesta requiere su división en subcuencas con características homogéneas de parámetros de escorrentía y de distribución temporal de lluvia. Asimismo es necesario la definición de una adecuada red fluvial formada por nudos de conexión y tramos de cauce que realicen la conexión entre dichas subcuencas.

Este tratamiento requiere la obtención del hidrograma completo de cada una de las subcuencas que permita su adecuada suma en los nudos y su propagación en los distintos tramos de la red. En la Figura 5.1, se describe un sencillo ejemplo de red fluvial formada por tres subcuencas cuya simulación requiere las siguientes operaciones:

1) cálculo del hidrograma de escorrentía de la subcuenca A
2) cálculo del hidrograma de escorrentía de la subcuenca B
3) suma de ambos hidrogramas en el nudo N-1
4) cálculo de la propagación del hidrograma suma a lo largo del tramo T-1
5) cálculo del hidrograma de escorrentía de la subcuenca C
6) suma de este último hidrograma y del cálculo de la propagación en el tramo T-1

Conviene indicar que el hidrograma generado en las subcuencas intermedias (como la C) se asume incorporando al final del tramo (T-1 en el ejemplo), lo que puede distorsionar ligeramente los resultados si su red de drenaje interna se aleja de dicha hipótesis.

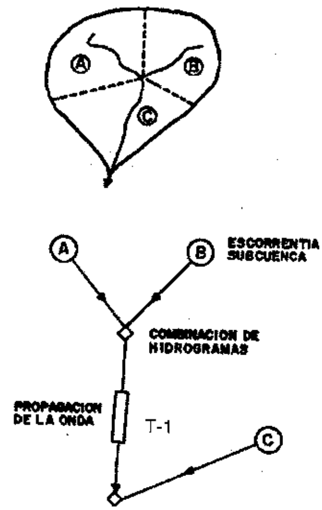

Fig. 5.1.–Ejemplo de desagregación espacial en 3 subcuencas

Las operaciones 1, 2 y 5 se realizan con cualquiera de los métodos ya indicados en el capítulo 3, las operaciones 3 y 6 son simples sumas de caudales a lo largo del tiempo y la operación 4: propagación de hidrogramas en tramo, va a ser tratada en el presente capítulo.

Los métodos de análisis de la propagación de hidrogramas estudian el movimiento de la onda de avenidas a través de un sistema fluvial, que va modificando su forma y el tiempo en el que se produce la punta debido a los efectos de almacenamiento y fricción.

Existen dos tipos generales de cálculo de la propagación de hidrogramas: hidráulicos e hidrológicos. Los métodos hidráulicos resuelven las ecuaciones diferenciales del flujo transitorio en cauces abiertos en tanto que los métodos hidrológicos, más simples, generalmente emplean la ecuación de continuidad y las relaciones existentes entre caudal y volumen almacenado.

5.2. Métodos hidráulicos de propagación de hidrogramas

Las ecuaciones de Saint-Venant son las ecuaciones básicas que describen el flujo transitorio unidimensional en conductos abiertos y pueden ser escritas como el siguiente sistema de dos ecuaciones: la de momentos (5.1) y la de continuidad (5.2).

$$Sf = So - \frac{dy}{dx} - \underbrace{\frac{v}{g}\frac{dv}{dx}}_{\text{convención}} - \underbrace{\frac{1}{g}\frac{dv}{dt}}_{\text{aceleración}} \qquad (5.1)$$

$$A\frac{dv}{dx} + v\,B\frac{dy}{dx} + B\frac{dy}{dt} = q \qquad (5.2)$$

siendo:

Sf : pendiente de energía
So : pendiente del lecho
y : calado
v : velocidad media
x : distancia en la dirección del flujo
A : área de la sección transversal
B : ancho de la lámina de agua
q : caudal lateral en su caso

La ecuación (5.1) es la denominada ecuación de la onda dinámica y considera todos los fenómenos del proceso. Su resolución, por métodos numéricos en los casos reales, permite obtener la evolución a lo largo del tiempo y del cauce no sólo del caudal, sino también del calado, a partir de los siguientes datos:

- secciones transversales del cauce
- rugosidad del lecho (generalmente coeficientes de Manning)
- situación inicial de la lámina de agua en el cauce
- hidrograma de entrada en la primera sección aguas arriba
- condición de contorno en la última sección aguas abajo, generalmente en la forma de una relación calado-caudal.

La ecuación (5.1) puede simplificarse si se desprecian términos, facilitando su resolución. Si se desprecian los términos de aceleración y convección se llega a la denominada ecuación de la onda de difusión y si además se desprecia la variación del calado (flujo uniforme) se obtiene la ecuación de la onda cinemática.

La elección entre uno u otro tipo de formulación debe realizarse a la vista de la importancia que los distintos términos tienen en el flujo. Una forma simple de elegir el tipo de ecuación a utilizar, en el caso de disponer de datos de altura-caudal, es el análisis de la histéresis de la curva de gasto representativa del tramo. Si esta histéresis es despreciable (similar relación altura-caudal tanto en la fase de crecida como de decrecida) la ecuación de la onda cinemática es suficiente para representar el flujo, si por contra es muy importante se requerirá la ecuación completa de la onda dinámica y la ecuación de la onda de difusión será adecuada en casos intermedios.

Los métodos hidráulicos indicados presentan una cierta complejidad de resolución y un elevado volumen de datos por lo que son más empleados los métodos hidrológicos que son desarrollados a continuación.

5.3. Métodos hidrológicos de propagación de hidrogramas

5.3.1. Introducción

Los métodos hidrológicos de cálculo de la propagación de ondas de avenida, son los habitualmente empleados debido a su simplicidad en los modelos de simulación del proceso lluvia-escorrentía. Normalmente requieren la estimación de unos parámetros empíricos que son difíciles de evaluar en ausencia de datos de caudales observados. Estos métodos utilizan como base la ecuación de continuidad que puede escribirse como:

$$I(t) - O(t) = \frac{dS(t)}{dt} \qquad (5.3.)$$

siendo:

I(t) : hidrograma de entrada en el tramo en el tiempo t

O(t) : hidrograma de salida en el tramo en el tiempo t

S(t) : volumen almacenado en el tramo en el tiempo t

Al discretizar y expresar en diferencias finitas la ecuación anterior en el intervalo de duración Δt comprendido entre el tiempo i y el tiempo i+1 resulta:

$$\frac{I_i + I_{i+1}}{2} = \frac{O_i + O_{i+1}}{2} = \frac{S_{i+1} - S_i}{\Delta t} \qquad (5.4)$$

A partir de esta relación, los métodos hidrológicos realizan distintas hipótesis que serán desarrolladas a continuación para los métodos más habituales: Puls, Muskingum y Muskingum-Cunge.

5.3.2. *Método de Puls*

El método de Puls modificado (USBR, 1989) es el más empleado de los métodos denominados de laminación, en los que se supone que el caudal de salida del elemento considerado (tramo del río o embalse) es exclusivamente función del volumen en él almacenado. Con esta hipótesis, el máximo caudal del hidrograma de salida coincidirá con el máximo del volumen almacenado y se alcanzará en el punto de corte con el hidrograma de entrada, puesto que dicho máximo se corresponde con una variación nula del volumen respecto al tiempo (dS/dt = 0) y por tanto I = 0.

Reagrupando la ecuación de continuidad *(5.4) resulta:*

$$\frac{I_i + I_{i+1}}{2} - \frac{O_i}{2} + \frac{S_i}{\Delta t} = \frac{S_{i+1}}{\Delta t} + \frac{O_{i+1}}{2} \qquad (5.5)$$

en la cual, para un determinado intervalo de tiempo i, i+1, es conocido:

- hidrograma de entrada: I_i, I_{i+1}
- volumen embalsado al comiendo del intervalo: S_i
- caudal de salida al comienzo del in*tervalo: O_i*

por lo que es calculable el término de la izquierda de la ecuación anterior.

Si es conocida la ley que relaciona el caudal de salida (0) y el volumen almacenado (S) es posible resolver la ecuación (5.5) y obtener los valores buscados de 0i+1 y Si+1. La resolución se aborda de forma distinta en el caso de tratarse de un embalse o de un tramo de cauce.

Embalse

En el caso de un embalse, la existencia de una lámina de agua prácticamente constante en todo el vaso simplifica la resolución pues determina la ley de desagüe: 0 = 0(H) y de almacenamiento: S = S(H). La ley de desagüe responde habitualmente a las conocidas fórmulas del aliviadero o de desagüe por orificio y la ley de almacena*miento es la relación entre la altura de* la lámina y el volumen embalsado.

Si previamente agrupamos los términos conocidos de la expresión (5.4) en la variable C definida mediante:

$$C_i = \frac{I_i + I_{i+1}}{2} - \frac{O_i}{2} + \frac{S_i}{\Delta t} \qquad (5.6)$$

y expresamos el volumen almacenado y el caudal de desagüe en función de la altura H de agua en el embalse resulta finalmente:

$$C_i = \frac{S_{i+1}(H_{i+1})}{\Delta t} + \frac{O_{i+1}(H_{i+1})}{2} \qquad (5.7)$$

La resolución de la ecuación (5.7) en cada uno de los intervalos de tiempo se plantea mediante un proceso iterativo con los siguientes pasos:

1. Cálculo de C_i mediante (5.6)
2. Se supone un valor para H_{i+1} (al comienzo del proceso es habitual asumir $H_{i+1} = H_i$)
3. Evaluación del caudal de desagüe O_{i+1} correspondiente a la altura H_{i+1}, mediante la ley de desagüe conocida $O = O(H)$
4. Obtención del volumen almacenado S_{i+1} despejando en (5.7)

$$S_{i+1} = \left(C_i - \frac{O_{i+1}}{2}\right)\Delta t \qquad (5.8)$$

5. Evaluación de la altura H_{i+1} correspondiente a dicho volumen S_{i+1}, a partir de la ley de almacenamiento conocida $S = S(H)$
6. Evaluación del caudal de desagüe O_{i+1} correspondiente a la altura recién calculada H_{i+1}, mediante la ley de desagüe conocida $O = O(H)$
7. Comprobación del criterio de convergencia: si el caudal de desagüe O_{i+1} obtenido en 6.es suficientemente parecido al calculado en 3, se ha concluido el proceso iterativo y los valores de S_{i+1}, H_{i+1} y O_{i+1} son los obtenidos en 4, 5 y 6 respectivamente. En caso contrario se realiza una nueva iteración, comenzando en 4.

Tramo de río

Un tramo de río puede simularse por el método de Puls asumiendo que su funcionamiento es análogo a un conjunto de N embalses colocados en cascada de modo que las salidas del situado aguas arriba sean las entradas del que se encuentra aguas abajo. El número de embalses en que debe dividirse un tramo de río actúa en realidad como un parámetro a calibrar para conseguir reproducir los hidrogramas observados. En ausencia de datos, el valor de N se obtiene dividiendo el tiempo de viaje de la onda a lo largo del tramo por el incremento de tiempo utilizado. Este tiempo de viaje (cociente entre la longitud del tramo y la celeridad de la onda) actuaría entonces como parámetro a estimar.

Una ver definido el número de subtramos, en cada uno de ellos se resuelve la ecuación (5.5), reescrita de la siguiente forma:

$$\frac{I_i + I_{i+1}}{2} - O_i + \left(\frac{S_i}{\Delta t} + \frac{O_i}{2}\right) = \frac{S_{i+1}}{\Delta t} + \frac{O_{i+1}}{2} \qquad (5.9)$$

para lo cual se define el índice de almacenamiento (K) como:

$$K = \frac{S}{\Delta t} + \frac{O}{2} \qquad (5.10)$$

con lo que la ecuación (5.9) se convierte en:

$$K_{i+1} = \frac{I_i + I_{i+1}}{2} - O_i + K_i \qquad (5.11)$$

La resolución de esta ecuación en cada intervalo de tiempo sigue los siguientes pasos:

1. Creación de la tabla O/K para el tramo de río considerado.
2. Obtención por interpolación a partir de la tabla O/K del valor de K_i correspondiente a O_i.
3. Obtención mediante (5.11) del valor de K_{i+1}.

4. Obtención por interpolación a partir de la tabla 0/K del valor de O_{i+1} correspondiente a K_{i+1}.
5. Obtención de S_{i+1} despejando de la expresión (5.10).

$$S_{i+1} = \left(K_{i+1} - \frac{O_{i+1}}{2}\right)\Delta t \qquad (5.12)$$

Los procedimientos habituales empleados para obtener la tabla 0/K en un tramo de río son dos:

A. Cálculo del perfil de la lámina de agua en régimen permanente.

Se realiza para distintos caudales (0) el cálculo de la curva de remanso, obteniendo en cada una de ellas el volumen de agua almacenado (S) en el tramo analizado.

B. Cálculo del calado en régimen uniforme por Manning.

Se adoptan unos valores medios de sección, pendiente y coeficiente de Manning en el tramo analizado obteniendo el calado, asumiendo régimen uniforme, para distintos caudales (0). El volumen de agua almacenado (S) se obtiene multiplicando la sección transversal obtenida por la longitud del tramo analizado.

5.3.3. *Método de Muskingum*

El método de Muskingum (US. ARMY, 1969) asume una relación lineal entre el volumen almacenado en el tramo y los caudales entrantes y salientes, mediante los parámetros K y X:

$$S = K(XI + (1 - X)\,O) \qquad (5.13)$$

Esta expresión es más general que el método anterior de Puls en el sentido de que el almacenamiento no es sólo función del caudal saliente pero por contra más particular puesto que admite relaciones exclusivamente lineales.

El parámetro X es adimensional y varía entre 0 y 0,5. En el primer caso, el volumen almacenado es sólo función del caudal de salida y se produce el máximo efecto de atenuación mientras que con un valor de 0,5 se produce una simple traslación de la onda sin ninguna variación en la punta. El parámetro K, con dimensiones de tiempo, tiene el sentido del tiempo de viaje de la onda a lo largo del tramo.

Sustituyendo (5.13) en la ecuación de continuidad (5.4) resulta:

$$O_{i+1} = C_1 I_i + C_2 I_{i+1} + C_3 O_i \qquad (5.14)$$

siendo:

$$C_1 = \frac{\Delta t/K + 2X}{\Delta t/K + 2\,(1-X)} \qquad (5.15)$$

$$C_2 = \frac{\Delta t/K + 2X}{\Delta t/K + 2\,(1-X)} \qquad (5.16)$$

$$C_3 = \frac{2(1=x) - \Delta t/K}{\Delta t/K + 2\,(1-X)} \qquad (5.17)$$

Con lo que el caudal de salida del tramo al final del intervalo: 0i+1, puede obtenerse como combinación lineal de:

- caudal de entrada a comienzo del intervalo: I_i
- caudal de entrada a final del intervalo: I_{i+1}
- caudal de salida a comienzo del intervalo: O_i

La longitud de los tramos, relacionada con el tiempo de viaje K, y el incremento de tiempo de cálculo Δt deben de cumplir la siguiente relación:

$$\frac{1}{2(1-x)} \leq \frac{K}{\Delta t} \leq \frac{1}{2x} \qquad (5.18)$$

que asegura la estabilidad del cálculo.

Los parámetros del método de Muskingum, K y X, varían con el caudal (véase apartado 5.3.4) pero suelen considerarse constantes tomando el sentido de unos valores medios.

Estimación de los parámetros

A. Sin datos de aforos

El valor de X debe ser estimado a partir de valores obtenidos en tramos de similares características, variando entre 0 si hay desbordamientos y laminaciones importantes y 0,5 si la inexistencia de desbordamiento hace prever una mera traslación de la onda. En cualquier caso la incidencia de los resultados es pequeña y un análisis de sensibilidad ante variaciones de este parámetro suele solucionar suficientemente el problema.

El valor de K, según su definición responde a la siguiente expresión:

$$K = \frac{L}{C} \qquad (5.19)$$

siendo L la longitud del tramo y C la celeridad de la onda. Este último valor puede obtenerse a partir de la siguiente expresión:

$$K = \frac{1}{B} + \frac{dQ}{dy} \qquad (5.20)$$

siendo B el ancho superior del cauce, Q el caudal e y el calado.

La expresión (5.19) puede evaluarse fácilmente, si se dispone de la curva de gasto representativa del tramo sin más que evaluar la tangente a dicha curva y dividirla por el ancho de la sección. En el caso de no disponer de datos de aforos directos, la curva de gasto se puede estimar a partir de la fórmula de Manning, asumiendo régimen uniforme en una sección transversal considerada representativa.

B. Con datos de aforos

En el caso de disponer de hidrogramas de entrada y de salida en el tramo estudiado, los valores de los parámetros pueden obtenerse por calibración. El tiempo de viaje K coincide con el desfase en tiempo observado entre los hidrogramas de entrada y salida normalmente referido al tiempo transcurrido entre la punta de ambos hidrogramas. El valor de X se obtiene por tanteos, eligiendo aquel que conduce a un mejor acuerdo entre el hidrograma de salida observado y calculado.

Un método de estimación de parámetros recomendado por USBR (1989) se basa en la hipótesis de linealidad expresada en la formulación (5.13) y se resume en la figura 5.2. En dicha figura se representan para distintos valores de X en abcisas el almacenamiento S y en ordenadas el caudal ponderado según la expresión X I + (1-X) O. El parámetro X seleccionado es aquel que conduce a la curva que mejor pueda aproximarse por una línea recta cuya pendiente es precisamente, según (5.13), el valor de 1/K. El cálculo de los puntos (S, XI + (1-X) O) se realiza directamente a partir de los hidrogramas de entrada y salida en lo referente a las ordenadas y a partir de la ecuación de continuidad (5.4) en lo referente a las abcisas asumiendo un almacenamiento inicial nulo.

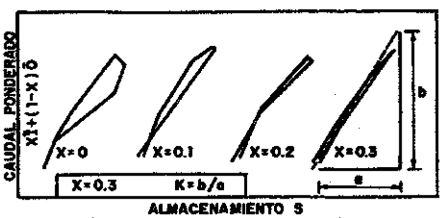

Fig. 5.2.–Ajuste de los parámetros del Método de Muskingum

5.3.4. Método de Muskingum - Cunge

Cunge (1967) demostró que la resolución por diferencias finitas de las ecuaciones de Saint-Venant (5.1) y (5.2) en el caso particular de despreciar los términos de convección y aceleración (ecuación de la onda de difusión) conduce a las mismas expresiones que las resultantes en el método de Muskingum: expresiones (5.14) a (5.16).

La comparación entre las expresiones en diferencias finitas y las tradicionales fórmulas de Muskingum, permite establecer las siguientes relaciones entre los parámetros de Muskingum y las características físicas del cauce y del flujo:

$$K = \frac{\Delta x}{C} \qquad (5.21)$$

$$X = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{Q}{B S_o\, c\, \Delta x}\right) \qquad (5.22)$$

siendo:

Δx: longitud del tramo en la discretización efectuada

c: celeridad de la onda de avenida

So: pendiente del lecho del cauce (m/m)

Q: caudal del tramo

B: ancho de la sección

Las anteriores relaciones permiten aplicar el método utilizando como único parámetro la celeridad de onda que puede estimarse mediante la relación (5.19). Estas expresiones tienen la ventaja de que consideran explícitamente la dependencia de los parámetros respecto al caudal circulante (habitualmente el caudal de entrada al tramo), con lo que permiten considerar la variación de los parámetros a lo largo de la crecida. Esta variación, no planteada en el método tradicional de Muskingum, es de mucha mayor importancia en el caso del parámetro K que en el del parámetro X.