

**XXIV CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA  
PUNTA DEL ESTE, URUGUAY, NOVIEMBRE 2010**

**ANÁLISIS COMPARATIVO DE DOS MÉTODOS PARA ESTIMAR  
HIDROGRAMAS DE INGRESO A VASOS**

***Gabriel Soto-Cortes<sup>1</sup>, Fabián Rivera-Trejo<sup>2</sup>, Baldemar Mendez-Antonio<sup>1</sup>, Darío Guaycochea-Guglielmi<sup>1</sup> y Eliseo Carrizosa-Elizondo<sup>3</sup>***

*<sup>1</sup>Departamento de Energía, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, C.P. 02200, Azcapotzalco, México, D.F., México. gsc@correo.azc.uam.mx*

*<sup>2</sup>DAIA, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Cunduacán Jalpa de Méndez, Col. La Esmeralda, C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco, México.*

*<sup>3</sup>Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México. Coyoacán, México D. F., México.*

**RESUMEN:**

Las presas y en general los grandes almacenamientos son estructuras que cumplen fines diversos para la sociedad: provisión de agua potable para uso doméstico, industrial y comercial, generación de energía e irrigación, además de que proporcionan seguridad contra sequías e inundaciones. Al respecto de este último aspecto, un problema crucial para definir políticas de operación contra inundaciones es la modelación inversa de avenidas que tradicionalmente se basa en la regla trapezoidal. Este método se usa ampliamente a pesar de sus desventajas, las cuales se relacionan con oscilaciones espurias y con la sobreestimación de los picos de la avenida. En este trabajo un método alternativo basado en un esquema en diferencias centrales se compara con la regla trapezoidal a través de evaluar el error cuadrático integral.

**ABSTRACT:**

Dams and reservoirs are important structures to the development of many societies. This infrastructure provides water for domestic, commercial and industrial consumption, power generation and irrigation. Moreover, dams supply security against droughts and protection from floods. In the matter, inverse modeling of runoff entering a reservoir is a crucial problem to define operational policies in order to avoid floods. The traditional numerical method to estimate these hydrographs is based in the trapezoidal rule. This method is widely used in despite of its disadvantages which are related with: spurious oscillations and with an overestimation of hydrographs peaks. In this work, a comparative analysis based in the integral time square error is developed considering the trapezoidal rule and a central differences scheme.

**PALABRAS CLAVES:**

Tránsito inverso de avenidas, regla trapezoidal, esquema en diferencias centrales.

## INTRODUCCIÓN

Las presas y los almacenamientos son estructuras de suma importancia para el desarrollo de la sociedad. Además de proveer agua potable, generación de energía e irrigación, ofrecen protección contra sequías e inundaciones. Sobre este último aspecto, el modelado inverso de las avenidas que ingresan a vasos es un problema crucial en la definición de políticas de operación que permitan disminuir el riesgo de inundación. El problema inverso que permite obtener el hidrograma de ingreso al almacenamiento consiste en resolver la ecuación:

$$I(t) = \frac{dV}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt} + O(\zeta) \quad [1]$$

Donde, usando la ecuación [1] el flujo de ingreso,  $I$ , se determina conociendo la variación del volumen almacenado,  $V$ , y el flujo de salida,  $O$ . Estas últimas, son función de la variación temporal de la elevación de la superficie libre del agua  $\zeta = \zeta(t)$ . La solución a este problema se consideraría trivial a no ser por las oscilaciones espurias que genera el método tradicional de tránsito inverso, denominado regla trapezoidal o esquema de Crank-Nicholson. A partir de éste se integra la ecuación [1] de acuerdo con la discretización siguiente:

$$\frac{I_{i+1} + I_i}{2} = \frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta t} + \frac{O_{i+1} + O_i}{2} \quad [2]$$

La ecuación [2] posee una estabilidad neutral y un error de truncado de orden dos  $\{O(\Delta t^2)\}$  lo que explica su comportamiento oscilatorio. Con este esquema el error en la estimación del flujo de entrada crece conforme el paso de tiempo de integración decrece (Soto *et al*, 2003). Por supuesto que esta es una restricción muy importante cuando se piensa en monitoreo a tiempo real. Aguilar y Aldama (1997, 2008), proponen un método para reducir el error generado por la discretización de Crank-Nicholson a partir de un esquema en diferencias centrales con error de truncado  $\{O(\Delta t^2)\}$ , de la siguiente manera:

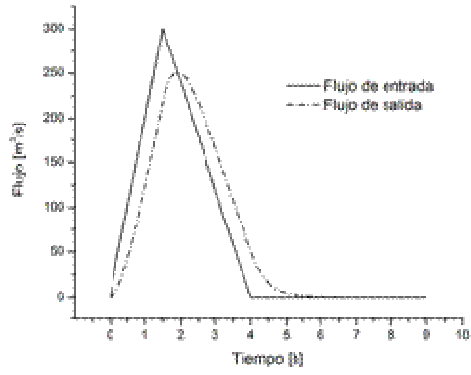
$$I_{i+1} = O_{i+1} + \frac{V_{i+2} - V_i}{2\Delta t} \quad [3]$$

Este esquema es incondicionalmente estable y, en ausencia de otras fuentes de error, el error inicial no se propaga.

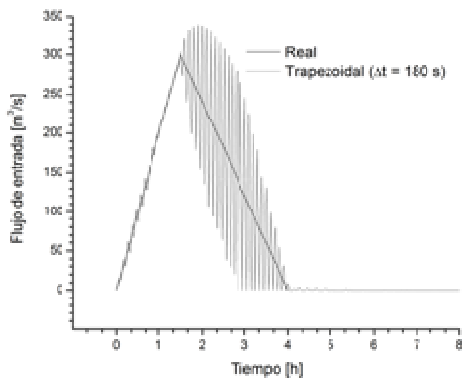
## ANÁLISIS DE LOS ESQUEMAS

En esta sección se usa un dominio hipotético en el que el problema inverso [1] tiene una solución analítica. Esta solución se basa en el hidrograma triangular descrito en Aldama y Aguilar (1997) y Soto *et al* (2003).

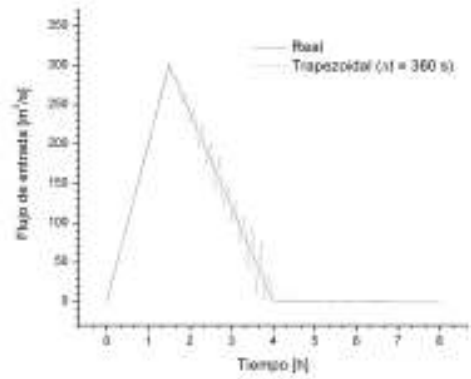
Como se reporta en dichos trabajos, el tránsito inverso estimado usando la regla trapezoidal, presenta oscilaciones espurias que se incrementan conforme  $\Delta t$  disminuye. La figura 2 muestra el hidrograma calculado con [2] para  $\Delta t = 180$  s, 360 s y 720 s. La Figura 3 muestra el mismo hidrograma obtenido con [3] para  $\Delta t = 180$  s, 360 s y 720 s.



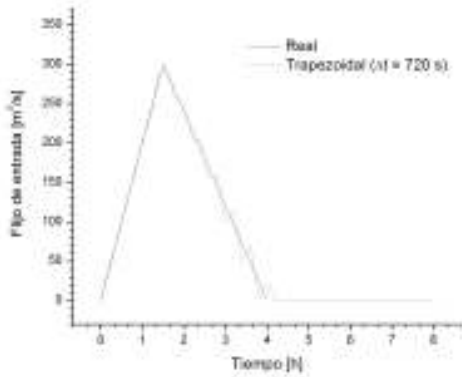
**Figura 1.-** Hidrograma de entrada y salida (solución analítica)



(a)

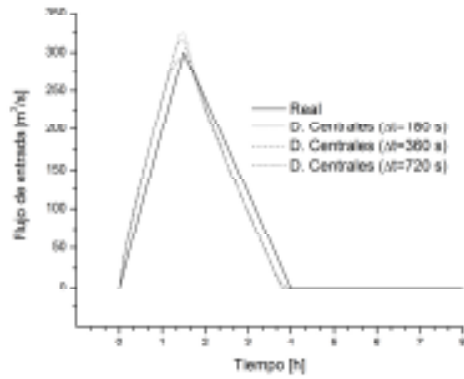


(b)



(c)

**Figura 2.-** Hidrograma de entrada calculado con la regla trapezoidal para  $\Delta t = 180$  s, 360 s y 720 s usando la regla trapezoidal.



**Figura 3.-** Hidrograma de entrada calculado con un esquema en diferencias centrales para  $\Delta t = 180, 360$  y  $720$  s.

A pesar de que este enfoque reduce las oscilaciones espurias, cuando se compara con la regla trapezoidal en términos del volumen acumulado y del gasto pico, no se aprecia un impacto significativo tal y como se muestra en las tablas 1 y 2. En el caso del volumen los errores son menores al 1% en el caso del esquema de trapezoidal y ligeramente mayores en el caso del esquema en diferencias centrales aún para el intervalo de 180 s. En el caso de la predicción del tiempo pico y del gasto, el esquema en diferencias muestra un desempeño más adecuado aunque en el orden de magnitud de los errores que genera la aplicación de la regla trapezoidal.

**Tabla 1.-** Desempeño del esquema de Crank-Nicholson para diferentes intervalos de tiempo.

$\Delta t$ [s]	volumen [m <sup>3</sup> ]	Esquema Trapezoidal			
		error [%]	tiempo pico [h]	gasto pico [m <sup>3</sup> /s]	error [%]
180	2176570.22	0.77	1.9	338.714	12.90
360	2173593.60	0.63	1.5	302.270	0.76
720	2166793.27	0.31	1.6	293.109	-2.30

Volumen real 2,160,000 m<sup>3</sup>, gasto pico real 300 m<sup>3</sup>/s, tiempo pico real 1.5 h.

**Tabla 2.-** Desempeño del esquema en diferencias centrales para diferentes intervalos de tiempo.

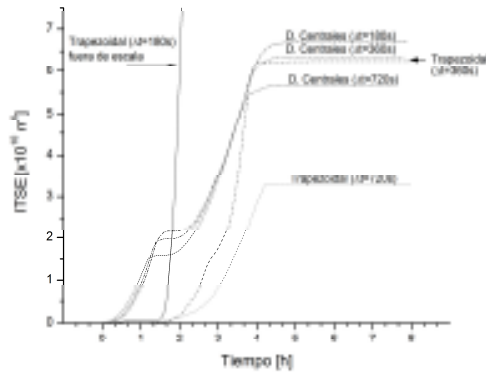
$\Delta t$ [s]	volumen [m <sup>3</sup> ]	Esquema en diferencias centrales			
		error [%]	tiempo pico [h]	gasto pico [m <sup>3</sup> /s]	error [%]
180	2197378.91	1.73	1.5	325.551	8.52
360	2185687.98	1.19	1.5	313.813	4.60
720	2153440.62	-0.30	1.4	292.948	-2.35

Volumen real 2,160,000 m<sup>3</sup>, gasto pico real 300 m<sup>3</sup>/s, tiempo pico real 1.5 h.

Sin embargo, si se introduce el concepto del error cuadrático integral ITSE:

$$ITSE = \int t * (I_{observado} - I_{calculado})^2 dt \quad [4]$$

se evidencian algunas particularidades de los esquemas [2] y [3] en función de la magnitud del paso de integración (Figura 4).



**Figura 4.-** Error cuadrático integral para el esquema trapezoidal y en diferencias centrales para  $\Delta t = 180, 360$  y  $720$  s.

## CONCLUSIONES

En este artículo el tránsito inverso fue considerado como un mecanismo para determinar el hidrograma de ingreso a un vaso, conociendo la dependencia temporal del nivel de la superficie libre. El modelado inverso de este flujo es un aspecto crucial para el diseño y operación de una presa. La frecuencia de adquisición de datos para resolver este problema depende de la aplicación, y a su vez la efectividad del modelo depende de dicha frecuencia. Históricamente, la regla trapezoidal se usa ampliamente con este fin a pesar de sus desventajas. En este trabajo, se comparó este esquema tradicional contra un esquema en diferencias centrales. A primera vista son evidentes las oscilaciones espurias que se presentan al aplicar la regla trapezoidal para bajas frecuencias, sin embargo, el análisis que se desarrolla en este trabajo permite distinguir algunas particularidades de interés para el diseño de modelos de inferencia en función de los tiempos de muestreo. Estos resultados ofrecen parámetros de decisión para el planteamiento de sistemas de pronóstico a tiempo real.

## REFERENCIAS

- Aldama, A. y Aguilar, E.** (1997). "Tránsito inverso para la estimación de avenidas de ingreso en vasos". *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. 12, pp. 15-25.
- Soto, G., Aguilar, R. y Rivera, F.** (2003). "Estimación de hidrogramas de ingreso usando observadores proporcionales". *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. 18, pp. 71-79.